

0.1 Andre Quillen Homology

Definition 0.1.1 *Simplicial Object*

Δ を partial orderd category としたとき、 Δ の morphism

$$d^i : [n-1] \longrightarrow [n] \quad (0 \leq i \leq n)$$

$$d^i(k) = \begin{cases} k & k \leq i-1 \\ k+1 & i \leq k \end{cases}$$

と、 i 番目をスキップする写像で定義し、

$$s^j : [n+1] \longrightarrow [n] \quad (0 \leq j \leq n)$$

$$s^j(k) = \begin{cases} k & k \leq j \\ k-1 & j+1 \leq k \end{cases}$$

と、 j 番目を重複させる写像とする。

C を category としたとき、 C の simplicial object とは、functor

$$X : \Delta^{op} \longrightarrow C$$

である。simplicial object の category を sC とかく。また、

$$d_i = X(d^i) : X_n \longrightarrow X_{n-1} , \quad s_j = X(s^j) : X_n \longrightarrow X_{n+1}$$

としそれぞれ、face map、degeneracy map と呼ぶ。

$X \in s\mathbf{Set}$ に対し、 $\pi_*(X) = \pi_*(|X|)$ と書くことにする。これは、 $\pi_n(X) \cong [\Delta^n / \partial\Delta^n, X]$ である。

Definition 0.1.2

simplicial R -module の category である $s\mathbf{Mod}_R$ に対し、

$$N : s\mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Ch}_R$$

を、次のように定義する。

$$NX_n = \frac{X_n}{s_0 X_{n-1} + \cdots + s_n X_{n-1}}$$

であり、boundary を

$$\partial = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i : NX_n \longrightarrow NX_{n-1}$$

で定義する。また、

$$N' : s\mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Ch}_R$$

を次のように定義する。

$$N'X_n = \bigcap_{i=0}^n \text{Ker}(d_i : X_n \longrightarrow X_{n-1})$$

であり、boundary は

$$d_0 : N'X_n \longrightarrow N'X_{n-1}$$

で定義する。このとき、

$$N'X_n \hookrightarrow X_n \longrightarrow NX_n$$

は isomorphism of chain complex である。 $N(N')$ を nomarization functor と呼ぶ。

Theorem 0.1.3

$X \in s\mathbf{Mod}_{\mathbf{Z}}$ に対し、 $\pi_*(X) \cong H_*(NX)$

Theorem 0.1.4

$$N : s\mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Ch}_R$$

は equivalence of category である。

Theorem 0.1.5

$s\mathbf{Mod}_R$ における model structure を以下のように定義する。 $f \in \text{Hom}_{s\mathbf{Mod}_R}(X, Y)$ に対し、

1. weak equivalence とは、 $f_* : \pi_*(X) \longrightarrow \pi_*(Y)$ が isomorphism である。
2. fibration とは、 $f_n : X_n \longrightarrow Y_n$ が $n \geq 1$ において全射である。
3. cofibration とは acyclic fibration に対し、LLP を持つものとする。

同様に、simplicial group にも model structure を考えることができる。

Definition 0.1.6

C : category において、 $A \in \text{ob}(C)$ が abelian object とは、任意の $X \in \text{ob}(C)$ に対し、 $\text{Hom}(X, A)$ が natural な (つまり、誘導される写像が準同型) abelian group となる object である。 C における abelian object の category を C_{ab} と書く。このとき morphism は、 Hom 上の誘導が準同型となるものである。

Example 0.1.7

1. $C = \mathbf{Set}$ に対し、 $C_{ab} = \mathbf{Ab}$ である。
2. $C = s\mathbf{Set}$ に対し、 $C_{ab} = s\mathbf{Mod}_R$ である。

Remmark 0.1.8

C が finite limit で閉じているとしたとき、multiplication

$$m : A \times A \longrightarrow A$$

と identity の $\varepsilon : * \longrightarrow A$ 、inverse の $i : A \longrightarrow A$ が存在することと、 A が abelian object であることは同値である。

Definition 0.1.9

C を model category とし、 C_{ab} にも model structure が与えられ、forgetful functor

$$C_{ab} \longrightarrow C$$

が right Quillen functor とし、この left adjoint を

$$Ab : C \longrightarrow C_{ab}$$

と書いて abelianization functor と呼ぶ。これは left Quillen functor なので、total derived functor

$$\mathbf{L}Ab : \text{Ho}(C) \longrightarrow \text{Ho}(C_{ab})$$

を誘導する。これを Quillen homology と呼ぶ。Quillen homology は π_* と組み合わせることで様々な homology 群を表せる。

Example 0.1.10 *Space homology from simplicial set*

$X \in s\mathbf{Set}$ に対し、 X は cofibrant であるので、

$$\mathbf{L}Ab(X) = Ab(X) = \mathbf{Z}X$$

であるが、 $\mathbf{Z}X$ は X から生成される free simplicial abelian group である。つまり、 $\mathbf{Z}X_n$ は X_n から生成される free abelian group。

$X \in \mathbf{TOP}$ に対し、

$$\pi_*(\mathbf{L}Ab(S(X))) = \pi_*(\mathbf{Z}S(X)) \cong H_*(N(\mathbf{Z}S(X))) \cong H_*(X; \mathbf{Z})$$

$N(\mathbf{Z}S(X)) \cong C(X)$ であることは定義を見ればわかる。

Example 0.1.11 *Space homology from Dold-Thom theorem*

$\mathbf{TOP}$ に対し、 $\mathbf{TOP}_{ab}$ は位相アーベル群であるが、 $X \in \mathbf{TOP}$ に対し、 $Y \xrightarrow{\sim} X$ で Y は X の cofibrant replacement とする。

$$\pi_*(\mathbf{L}Ab(X)) \cong \pi_*(Ab(Y)) \cong H_*(Y) \cong H_*(X)$$

$\pi_*(Ab(Y)) \cong H_*(Y)$ は Dold-Thom の定理により成り立つ。

Example 0.1.12 *Homology of Group*

G を group とし、 $G : \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Group}$ を G への constant functor とみなし、 $G \in s\mathbf{Group}$ と考える。また、 G の cofibrant replacement を $X \in s\mathbf{Group}$ とすれば、

$$\mathbf{L}Ab(G) = Ab(X) = X/[X, X]$$

ただし、 $X/[X, X]_n = X_n/[X_n, X_n]$ でこれは群のアーベル化である。

このとき、 $X \in s\mathbf{Group}$ の分類空間 BX を考えるのだが、これはまず、各 $X_n \in \mathbf{Group}$ で群の分類空間を取り、simplicial space が構成されるが、その geometric realization として BX が定義される。つまり、bisimplicial の構造を持ち BX には 2 種類の filtration が考えられる。これらから spectral sequence を計算すると、

$$E_{p,q}^1 \cong \begin{cases} X_p/[X_p, X_p] & q = 1 \\ \mathbf{Z} & q = 0 \\ 0 & q > 1 \end{cases}$$

であるので、 $E_{p,1}^2 = \pi_p(\mathbf{L}Ab(G))$, $E_{0,0}^2 = \mathbf{Z}$ であり、その他の p, q に対し、 $E_{p,q}^2 = 0$ である。これにより $p \geq 0$ に対し、

$$\pi_p(\mathbf{L}Ab(G)) = E_{p,1}^2 \cong E_{p,1}^\infty \cong H_{p+1}(BX) \cong H_{p+1}(BG)$$